LAMPIRAN 5

OSN-PERTAMINA 2012

OLIMPIADE SAINS NASIONAL PERTAMINA : MATEMATIKA | FISIKA | KIMIA | BIOLOGI

Mencetak Generasi Sobat Bumi Berprestasi

BABAK PENYISIHAN SELEKSI TINGKAT PROVINSI

BIDANG KOMPETISI

MATEMATIKA

bekerjasama dengan : UNIVERSITAS INDONESIA

Olimpiade Sains Nasional Pertamina 2012

Petunjuk :

1. Tuliskan secara lengkap Nama, Nomor Ujian dan data lainnya pada Lembar Jawab Komputer (LJK).
2. Ujian seleksi ini terdiri dari **40** soal pilihan ganda.
3. Setiap jawaban **benar** akan mendapat nilai **2, 3,** atau **4** tergantung tingkat kesulitan soal; sedangkan jawaban yang **salah** akan diberi nilai **nol**.
4. Tingkat kesulitan masing-masing nomor telah ditetapkan dan dirahasiakan oleh Tim Soal dan tidak dicantumkan di lembar soal.
5. Waktu ujian berlangsung selama **120 menit**.
6. Gunakan pensil 2B untuk mengisi jawaban anda pada lembar LJK.
7. Semua jawaban harus ditulis di lembar LJK yang tersedia.
8. Peserta dapat mulai bekerja bila sudah ada tanda mulai dari pengawas.
9. Peserta tidak diperkenankan meninggalkan ruangan ujian sebelum waktu ujian berakhir.
10. Peserta harus segera berhenti bekerja bila ada tanda berhenti dari Pengawas.
11. Letakkan lembar jawaban di meja sebelah kanan dan segera meninggalkan ruangan.
12. **Tidak diperkenankan** menggunakan kalkulator.

Pilihlah jawaban yang paling tepat

1. Grup (Z_5, +) memenuhi sifat-sifat berikut, kecuali:

   a. Komutatif
   b. Asosiatif
   c. Setiap elemen mempunyai invers
   d. Selalu mempunyai subgrup sejati
   e. Setiap subgrupnya adalah subgrup normal

2. Kontainer milik Pertamina yang parkir di lapangan parkir suatu pelabuhan harus membayar uang parkir sebesar Rp 20.000 untuk satu jam pertama atau kurang dan Rp 10.000 untuk setiap jam berikutnya dengan biaya parkir maksimum per hari Rp 60.000. Jika $B = f(t)$ menyatakan besarnya biaya parkir dalam rupiah sebagai fungsi dari waktu dalam jam, maka pernyataan yang paling tepat yang menyatakan titik-titik diskontinu dari fungsi tersebut adalah:

   a. $f(t)$ tidak mempunyai titik-titik diskontinu
   b. $f(t)$ diskontinu untuk $t = 1,2,3,4,5$
   c. $f(t)$ diskontinu untuk $t > 5$
   d. Tidak ada jawaban yang tepat
   e. $f(t)$ diskontinu untuk $t = 5$

3. Diketahui ada 6 orang berada dalam sebuah lift di gedung 10 lantai. Banyaknya cara orang yang berada dalam lift memilih lantai tempat mereka keluar adalah:

   a. $\binom{10}{4}$ b. $\binom{10}{6}$ c. $\binom{16}{6}$ d. $\binom{16}{10}$ e. $\binom{15}{9}$

4. Sisa hasil bagi (*remainder*) dari bilangan 11^{2402} dibagi dengan 3000 adalah:

   a. 120
   b. 121
   c. 122
   d. 123
   e. 125

5. Jika $P_1 = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 3$, $P_2 = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$, dan $P_3 = x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 2$, memenuhi $aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0$, dengan $(a.b.c) \neq 0$, maka nilai $a + b + c$ adalah:

   a. 0 b. 1 c. -1 d. 2 e. -2

6. Periode dari solusi non-zero dari $\ddot{x} + 4x = 0$ adalah:

a. 2 b. π c. 4 d. 2π e. 4π

7. Jika $a^2 > b^2$, maka hasil $\int \frac{1}{a+bcosx} dx$ adalah:

a. $\frac{2}{a-b} tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{(a-b)}{a+b}} \right) + k$

b. $\frac{2}{\sqrt{a+b}} - \sqrt{a+b}\ tan\frac{x}{2} + k$

c. $\frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)}} tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{(a-b)}{a+b}} tan\frac{x}{2} \right) + k$

d. $\frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}} tan^{-1}\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} + k$

e. $tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \right) + tan^{-1}\frac{x}{2} + k$

8. Seorang pemilik restoran ingin mengetahui apakah cara pembayaran yang dipilih pelanggan berkaitan dengan besarnya biaya pembelian makanan. Untuk keperluan tersebut, pemilik restoran mengambil sampel secara acak sebanyak 100 pelanggan dengan hasil sebagai berikut:

Besarnya biaya pembelian makanan (Rp)	Cara pembayaran	
	Tunai	Kartu kredit
$<$ Rp. 250.000	18	12
$\geq$ Rp. 250.000	24	46

Jika dipilih satu pelanggan secara acak, maka probabilitas bahwa pelanggan tersebut membayar tunai adalah:

a. $\frac{18}{100}$ b. $\frac{42}{100}$ c. $\frac{18}{42}$ d. $\frac{42}{58}$ e. $\frac{24}{100}$

9. Dalam suatu ruangan terdapat 8 orang mahasiswa, 5 diantaranya adalah perempuan. Jika 4 orang mahasiswa dipilih secara acak, probabilitas terpilih lebih dari 2 mahasiswa perempuan:

a. $\frac{5}{8}$ b. $\frac{4}{5}$ c. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{2}{5}$ e. $\frac{6}{56}$

10. Jika I = $\int_{-1}^{-1} \int_{-\sqrt{(1-x^2)}}^{\sqrt{(1-x^2)}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z\, dz\, dy\, dx$, maka nilai I adalah:

a. $\frac{7\pi}{12}$ b. $\frac{4\pi}{9}$ c. $\frac{5\pi}{12}$ d. $\frac{7\pi}{11}$ e. $\frac{6\pi}{10}$

11. W adalah himpunan polynomial berderajat 5 atau kurang. Jika diketahui fungsi linear $\frac{d^2}{dx^2}: W \rightarrow W$, maka basis untuk ruang nol dari $\frac{d^2}{dx^2}$ adalah:

a. $\{1, x, x^2\}$
b. $\{1, x\}$
c. $\{1\}$
d. $\{x^2\}$
e. $\{x^2, x^3, x^4, x^5\}$

12. Bilangan bulat positip terkecil yang merupakan solusi dari sistem kongruen (*system of congruences*) berikut ini,

$$x \equiv 4 \pmod 8$$
$$x \equiv 8 \pmod{12}$$
$$x \equiv 12 \pmod{20}$$
$$x \equiv 20 \pmod{42}$$

adalah:

a. 592
b. 629
c. 692
d. 952
e. 966

13. Misalkan bilangan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8 diletakkan pada verteks dari kubus sedemikian sehingga jumlah 3 bilangan pada sisi manapun tidak kurang dari 10. Nilai maksimum untuk jumlah empat bilangan pada sisi kubus adalah:

a. 21 b. 20 c. 19 d. 18 e. 17

14. Sebuah tangki berbentuk silinder dengan kedua penutup pada ujungnya berbentuk setengah bola. Jika panjang silinder itu 100 cm dan jari-jarinya 10 cm, maka banyaknya cat yang dibutuhkan untuk menutupi bagian luar tangki setebal 1 mm adalah:

a. 200π cm^3
b. 40π cm^3
c. 240π cm^3
d. 160π cm^3
e. Semua jawaban salah

15. Misalkan 3Z adalah subgrup di (Z,+). Himpunan yang membentuk koset dari Z adalah:

a. 3Z+1
b. 2Z+1
c. 2Z+2

d.Z+1 e.Z+2

16. Dari beberapa diagram *phase plane* yang di bawah ini, diagram manakah yang menggambarkan keadaan sistem yang stabil secara asimtotik.

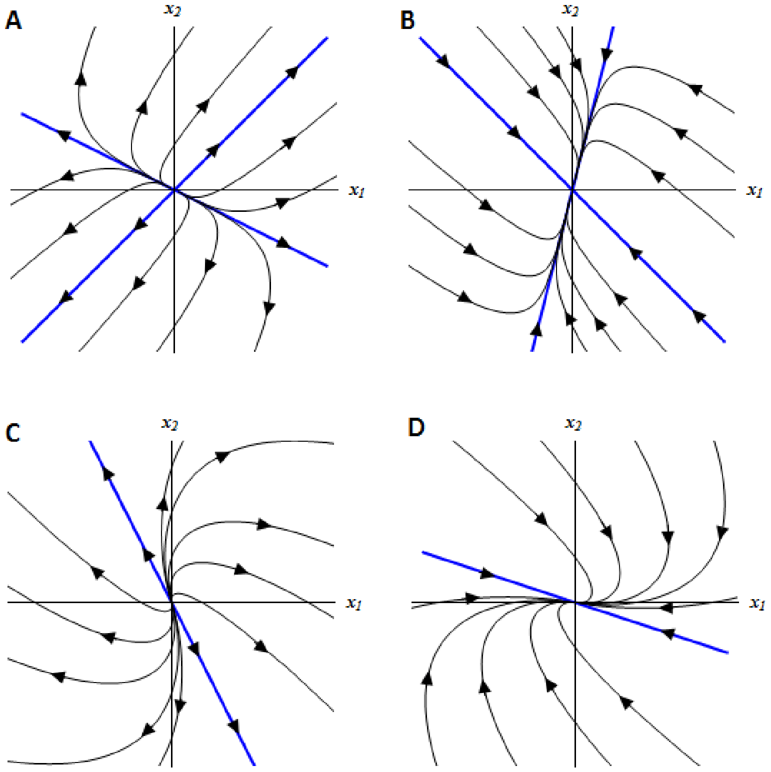

Diagram Phase Plane

a.Diagram A dan B
b.Diagram C dan D
c. Diagram A dan C
d.Diagram B dan D
e.Diagram A dan D

17. Misalkan X berdistribusi Poisson dengan parameter μ. Untuk menguji hipotesis $H_0: \theta = \frac{1}{4}$ terhadap alternatif $H_1: \theta > \frac{1}{4}$ digunakan sampel acak $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ dari distribusi Poisson ini. Daerah kritis untuk pengujian adalah:

a. $K = \{(x_1, x_2, \dots, x_{16}); \sum_{i=1}^{16} |x_i| \geq c\}$
b. $K = \{(x_1, x_2, \dots, x_{16}); \left|\sum_{i=1}^{16} x_i\right| \geq c\}$
c.$K = \{(x_1, x_2, \dots, x_{16}); \sum_{i=1}^{16} x_i \leq c\}$
d. $K = \{(x_1, x_2, \dots, x_{16}); \sum_{i=1}^{16} x_i^2 \geq c\}$
e. $K = \{(x_1, x_2, \dots, x_{16}); \sum_{i=1}^{16} x_i \geq c\}$

18. Hasil $\iint_D exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dxdy$ dimana $D = \{(x,y)|x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$ adalah:

a. $\cosh(1)$

b. $\sinh(1)$

c. $\cosh(1/2)$

d. $\frac{1}{2}\cosh(1)$

e. $\frac{1}{2}\sinh(1)$

19. Misalkan matrik *B* memiliki nilai eigen masing-masing 1 dan 2 dengan vektor eigen yang bersesuaian adalah $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$. Solusi dari persamaan $\dot{u} = Bu$ jika $u(0) = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ adalah:

a. $u(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3e^t + e^{2t}\\3e^t + e^{2t}\end{bmatrix}$

b. $u(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3e^t + e^{2t}\\3e^t - 3e^{2t}\end{bmatrix}$

c. $u(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3e^t + e^{2t}\\3e^t - e^{2t}\end{bmatrix}$

d. $u(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3e^t + e^{2t}\\3e^t - 3e^{-2t}\end{bmatrix}$

e. $u(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3e^t + e^{2t}\\3e^t + 3e^{2t}\end{bmatrix}$

20. Diketahui polinomial karakteristik dari matriks $A_{n\times n}$ adalah sebagai berikut: $(x-c_1)^{d_1}(x-c_2)^{d_2}\ldots(x-c_k)^{d_k}$ dimana $c_i \neq c_j$, untuk $i \neq j$. Misalkan V adalah ruang vector yang berisi semua matriks $B_{n\times n}$ sedemikian sehingga AB = BA. Dimensi dari V adalah:

a. $d_1 + d_2 + \cdots + d_k$

b. $d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_k^2$

c. n^2

d. $2(d_1 + d_2 + \cdots + d_k)$

e. n

21. Tiga soal olimpiade matematika diberikan kepada 25 peserta. Semua peserta paling sedikit menyelesaikan satu soal. Banyaknya peserta yang menyelesaikan soal kedua dan bukan soal pertama dua kali lebih banyak dari yang menyelesaikan soal ketiga dan bukan soal pertama. Banyaknya peserta yang menyelesaikan hanya soal pertama satu orang lebih banyak dari yang menyelesaikan soal pertama dan paling sedikit satu soal lainnya. Diantara semua peserta yang menyelesaikan satu soal saja, setengahnya menyelesaikan soal pertama. Berapa banyak peserta yang hanya menyelesaikan soal pertama?

a. 2 b. 4 c. 6 d. 8 e. 10

22. Suatu bilangan bulat positip *d* yang membagi $(n^2 + 1)$ dan juga membagi $[(n+1)^2 + 1]$ untuk beberapa bilangan bulat *n* adalah:

a. 1, 2
b. 1, 3
c. 1, 5
d. 1, 2, 3, 5
e. 1, 2, 3, 5, 7

23. Tabel dibawah ini menyatakan harga gas Elpiji per tabung dalam rupiah sebagai fungsi dari waktu dalam tahun selama periode tiga tahun.

t	H(t)
2012	Rp 80.000
2011	Rp 70.000
2010	Rp 65.000

Pernyataan yang paling tepat yang menyatakan laju perubahan harga gas Elpiji per tabung pada tahun 2011 adalah:

a. Rp 5.000
b. Rp 2.500
c. Rp 10.000
d. Rp 7.500
e. Tidak ada yang tepat

24. Misalkan G grup. Jika G/H adalah himpunan koset dari H di G maka agar memenuhi teorema Lagrange |G/H|=|G|/|H|, maka G haruslah:

a. Komutatif
b. Tak komutatif
c. Hingga
d. Tak hingga
e. Tidak ada jawaban yang sesuai

25. Tentukan nilai bilangan bulat positip terkecil *t*, sedemikian sehingga ada bilangan bulat $x_1, x_2, \dots, x_t$ yang memenuhi:

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_t^3 = 2002^{2002}.$$

a. 4 b. 5 c. 6 d. 7 e. 8

26. Untuk $S = \{(x, y, z) \epsilon\, \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^3 = 1\}$, maka hasil perhitungan dari integral permukaan $\int_S (x^2 + y + z)\, dA$ adalah:

a. $\frac{\pi}{4}$ b. $\frac{\pi}{2}$ c. $\frac{3\pi}{4}$ d. $\frac{4\pi}{3}$ e. $\frac{3\pi}{2}$

27. Solusi dari masalah nilai awal dengan persamaan differensial $y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$ dengan nilai awal $y(0) = -1$ adalah:

a. $y(x) = +\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$

b. $y(x) = -\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$

c. $y(x) = +\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{1+x^2}}}$

d. $y(x) = -\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{1+x^2}}}$

e. $y(x) = -\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{1-x^2}}}$

28. Jika *H* dan *K* adalah subgrup-subgrup dari $(Z,+)$ maka yang membentuk subgrup dari $(Z,+)$ adalah:

a. $(H \cap K, +)$

b. $(H \cap K, -)$

c. $(H \cup K, +)$

d. $(H \cup K, -)$

e. Semua pernyataan benar

29. Perhatikan sistem $x + y = z + u$ dan $2xy = zu$. Nilai terbesar dari konstanta real m sedemikian sehingga $m \leq x/y$ untuk sembarang solusi bilangan bulat positip (x, y, z, u) dari sistem, dengan $x \geq y$, adalah :

a. $2 + 3\sqrt{3}$

b. $2 - 3\sqrt{3}$

c. $3 - 2\sqrt{2}$

d. $3 + 2\sqrt{2}$

e. $2 + 3\sqrt{2}$

30. Jika $0 < a < b$, maka $\lim_{t\to 0} \left\{\int_0^1 [bx + a(1-x)]^t \, dx\right\}^{\frac{1}{t}}$ adalah:

a. $e^{-1}\left(\frac{b^a}{a^b}\right)^{1/(b-a)}$

b. $e^{-1}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)$

c. $e^{-1}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{1/(b+a)}$

d. $e^{-1}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{(b-a)}$

e. $e^{-1}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{1/(b-a)}$

31. Solusi dari persamaan diferensial dengan masalah nilai awal berikut ini, $2xy^2 + 4 = 2(3 - x^2y)y'$ dimana nilai $y(-1) = 8$ adalah:

a. $y(t) = \frac{t^2-25}{\ln(t^2+1)-2}$

b. $y(t) = \frac{t^2+25}{\ln(t^2+1)-2}$

c. $y(t) = \frac{t^2-25}{\ln(t^2-1)-2}$

d. $y(t) = \frac{t^2-25}{\ln(t^2+1)+2}$

e. $y(t) = \frac{t^2+25}{\ln(t^2+1)+2}$

32. Jika Z_{11} suatu grup terhadap perkalian mod 11 maka invers dari 6 adalah:

a. 4 b. 5 c. 6 d. 7 e. 8

33. A adalah matriks simetris berukuran $n \times n$, yang nilai matriknya adalah:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ & & \dots & & & \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Banyaknya elemen yang bernilai nol pada invers dari matriks A adalah:

a. $2n - 2$

b. $2n$

c. $n^2 - 2n$

d. $n^2 - 2n+2$

e. $2n + 2$

34. Sekumpulan ternak terdiri dari kuda dan sapi; dan untuk setiap jenis binatang ternak terdapat yang berwarna putih, hitam, belang – belang dan coklat. Jumlah kuda putih lebih banyak ½ bagian + 1/3 bagian dari jumlah kuda hitam dibandingkan dengan jumlah kuda coklat. Jumlah kuda hitam lebih banyak sebesar ¼ bagian + 1/5 bagian dari jumlah kuda belang–belang dibandingkan dengan jumlah kuda coklat. Jumlah kuda belang–belang lebih banyak sebesar 1/6 bagian + 1/7 bagian dari jumlah kuda putih dibandingkan jumlah kuda coklat. Untuk jumlah sapi, yang berwarna putih adalah 1/3 bagian + ¼ bagian dari total hewan ternak yang berwarna hitam; yang berwarna hitam adalah ¼ bagian + 1/5 bagian dari total hewan ternak belang–belang; yang belang–belang adalah 1/5 bagian + 1/6 bagian dari total hewan ternak yang berwarna coklat; dan yang berwarna coklat adalah 1/6 bagian + 1/7 bagian dari total hewan ternak yang berwarna putih. Perbandingan yang paling sederhana dari total jumlah sapi dengan total jumlah kuda adalah:

a. 10.366.482 : 7.206.360
b. 7.460.514 : 4.893.246
c. 7.358.060 : 3.515.820
d. 4.149.387 : 5.439.213
e. 29.334.443 : 21.054.639

35. Diketahui $P_1, P_2, \ldots, P_n$ adalah titik-titik pada sebuah lingkaran. Banyaknya cara pewarnaan yang mungkin dari titik-titik ini dengan m warna, $m \geq 2$, sedemikian sehingga dua titik yang berdekatan memiliki warna yang berbeda adalah:
a. $(m-1)^{n+1}$
b. $(m-1)^n$
c. $m^n + m - 1$
d. $(m-1)^n + (-1)^n(m-1)$
e. $m^n + (-1)^n m$

36. Diketahui n adalah bilangan bulat yang lebih besar dari 1. Banyaknya permutasi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dari bilangan $1, 2, \ldots, n$ sedemikian sehingga terdapat hanya satu indeks $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ dengan $a_i > a_{i+1}$ adalah:

a. $2^{n-1} - 1$
b. $2^n - n - 1$
c. $2^n - 1$
d. $(n-1)!$
e. $n!$

37. Kerangka baja sebuah gedung baru milik Pertamina telah selesai dibangun. Dari jarak 18 m dari lantai dasar, seorang mengamati lift barang di dalam gedung yang naik dengan kecepatan konstan 5m/detik. Laju sudut elevasi antara garis hubung mata pengamat-lift dengan garis datar mata pengamat 6 detik setelah garis hubung tersebut melintasi garis horizontal adalah:

a. $\frac{18}{5}\left(\tan\left(arc\ \cos\frac{5}{18}\right)\right)^2$
b. $\frac{5}{18}\tan\left(arc\cos\frac{5}{18}\right)$
c. $\frac{18}{5}\left(\cos\left(arc\ \tan\frac{5}{18}\right)\right)^2$
d. $\frac{5}{18}\left(\cos\left(arc\ \tan\frac{5}{18}\right)\right)^2$
e. Semua salah

38. Pernyataan yang salah mengenai fungsi berikut ini,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, 0 < y < x^2 \\ 0, \text{ lainnya} \end{cases}$$ adalah:

a. $f(x,y)$ tidak terturunkan di (0,0)

b. $f(x,y)$ tidak kontinu di (0,0)

c. Turunan berarah $f(x,y)$ di (0,0) tidak ada untuk semua arah

d. Turunan berarah $f(x,y)$ di (0,0) ada untuk semua arah

e. Turunan parsial yang pertama dari $f(x,y)$ ada di (0,0)

39. Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ menyatakan suatu sampel acak yang diambil dari suatu distribusi Gamma dengan α = 9 dan β> 0. (1-α)100% interval kepercayaan untuk mean dari X adalah:

a. $\left(\frac{30\bar{x}}{z\alpha/_2 - 30}; \frac{30\bar{x}}{-z\alpha/_2 - 30}\right)$

b. $\left(\frac{30\bar{x}+30}{-z\alpha/_2}; \frac{30\bar{x}+30}{z\alpha/_2}\right)$

c. $\left(\frac{30\bar{x}-30}{z\alpha/_2}; \frac{30\bar{x}-30}{-z\alpha/_2}\right)$

d. $\left(\frac{30\bar{x}}{-z\alpha/_2 + 30}; \frac{30\bar{x}}{z\alpha/_2 + 30}\right)$

e. $\left(\frac{30\bar{x}}{z\alpha/_2 + 30}; \frac{30\bar{x}}{-z\alpha/_2 + 30}\right)$

40. Misalkan $\bar{X}_n$ menyatakan mean dari sampel acak berukuran *n* dari distribusi Poisson dengan parameter $\mu = n$. MGF dari $Y_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ adalah:

a. $exp\left[-t\sqrt{n} + n\left(e^{t\sqrt{n}} - 1\right)\right]$

b. $exp\left[-t\sqrt{n} + n\left(e^{t/n} - 1\right)\right]$

c. $exp\left[-tn + n^2\left(e^{t\sqrt{n}} - 1\right)\right]$

d. $exp\left[-tn + n^2\left(e^{t/n} - 1\right)\right]$

e. $exp\left[-t\sqrt{n} + n^2\left(e^{t/n} - 1\right)\right]$